KEBERADAAN SOLUSI PERSAMAAN DIOPHANTIN MATRIKS POLINOMIAL DAN PENYELESAIANNYA MENGGUNAKAN TITIK-TITIK INTERPOLASI

Laila Istiani[1] dan R. Heri Soelistyo Utomo[2]
[1, 2]Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. Diophantine equation is a matrix polynomial equation of the form $X(s)D(s)+Y(s)N(s)=Q(s)$. Here, we investigate the existence of the solutions $[X(s),Y(s)]$. It can be investigated by using the grestest common right divisors of the matrix $[D(s),\ N(s)]$. Then, the solutions can be solved by transforming to the form of the polynomial matrix equation $M(s)L(s)=Q(s)$. By taking the interpolation points will be obtained the solutions $M(s)$ of degree r.

Keywords : diophantin equation, the greatest common right divisor, right coprime

1. PENDAHULUAN

Di dalam mencari hubungan antara variabel–variabel, baik di dalam ilmu ekonomi maupun di dalam ilmu lainnya, sering dipecahkan suatu persoalan yang terdiri atas lebih dari dua persamaan. Bahkan di suatu negara yang telah maju, terutama di dalam penggunaan alat berhitung otomatis yang modern (komputer), tidak jarang di dalam menemukan model ekonominya harus memecahkan suatu sistem persamaan yang terdiri dari puluhan persamaan dengan ratusan variabel-variabel yang harus dicari nilainya.

Matriks pada dasarnya memberikan memudahkan di dalam pembuatan analisis-analisis yang mencakup hubungan antara variabel-variabel [3]. Entri-entri dalam sebuah matriks dapat berbentuk konstanta ataupun suatu fungsi polinomial.

Pada permasalahan ini, akan dibahas tentang keberadaan solusi persamaan matriks polinomial, kemudian dicari penyelesaiannya. Di sini, solusi persamaan diophantin yang juga berupa matriks polinomial, diperoleh dengan menggunakan titik- titik interpolasi.

2. PEMBAHASAN

Konsep untuk interpolasi polinomial diberikan sebagai berikut.

Jika diberikan sebanyak l titik interpolasi, s_j skalar yang berbeda dan $\boldsymbol{b_j}$ suatu vektor, dengan j=1, 2, ..., l, maka dapat dibentuk satu dan hanya satu polinomial $q(s)$ berderajat n, di mana n = l -1 sedemikian sehingga:

$$q(s_j) = b_j,\quad j = 1, 2, ..., l \tag{1}$$

dan

$$\begin{aligned} q(s) &= \sum_{i=0}^{n} a_i s^i,\ a_n \neq 0 \\ &= [a_0\ a_1\ .\ .\ .\ a_n]\begin{bmatrix}1\\ s\\ .\\ .\\ s^n\end{bmatrix} \\ &= q[1, s, ..., s^n]^T, \end{aligned}$$

dengan q adalah vektor baris dengan ukuran (1x(n+1)) yang merupakan koefi-sien–koefisien polinomial $q(s)$. Kemudian persamaan (1) dapat ditulis sebagai:

$$qV = q\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & & s_l \\ s_1^{\ 2} & s_2^{\ 2} & & s_l^{\ 2} \\ \vdots & & & \vdots \\ s_1^{\ l-1} & s_2^{\ l-1} & \dots & s_l^{\ l-1} \end{bmatrix}$$

$= [b_1, ..., b_l] = B_l.$ (2)

Matriks V merupakan matriks Vandermonde berukuran (lxl) yang non singular jika dan hanya jika s_j skalar yang berbeda dengan j=1,..., l dan untuk s_j skalar yang berbeda matriks Vandermonde mempunyai rank penuh. Karena matriks Vandermonde mempunyai rank penuh, persamaan (2) mempunyai solusi tunggal q, sehingga polinomial q(s) berderajat n akan mempunyai solusi tunggal yang memenuhi persamaan (1).

Contoh 1

Misalkan akan dibentuk suatu polinomial q(s) berderajat 3 jika diberikan titik-titik interpolasi, yaitu:

$\{(s_j,b_j)$, j = 1, ..., 4}= {(1,[2]), (2, [0]), (3,[-1]), (4,[1])}, maka n = l - 1. Sehingga akan didapatkan solusi q(s) yang tunggal, yaitu

$$q(s) = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{6} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}s^3 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{6}s + 3 .$$

Interpolasi Matriks Polinomial

Untuk kasus matriks polinomial terdapat sedikit perbedaan dengan kasus polinomial, di mana pada kasus polinomial hanya membutuhkan 2 titik interpolasi (s_j dan b_j) sedangkan untuk kasus matriks polinomial membutuhkan 3 titik interpolasi (s_j,a_j,b_j), dimana $a_j \neq 0$ yang merupakan vektor berukuran (mx1), b_j merupakan vektor berurutan (px1), dan s_j suatu skalar.

Teorema 1. [4]

Diberikan titik interpolasi triplets (s_j, a_j, b_j) dengan j = 1,…,l, d_i integer non negatif dengan $l=\sum_{i=1}^{m} d_i + m$, sedemikian se-hingga matriks $S_l = [S(s_1)a_1, \dots, S(s_l)a_l]$ yang berukuran $((\sum_{i=1}^{m} d_i + m)\times l)$ full rank, maka terdapat dengan tunggal matriks polinomial $Q(s)$ berukuran ($p\times m$) dengan derajat kolom d_i, $i=1,\dots,m$ yang memenuhi $Q(s_j)a_j = b_j$, j = 1,…, l (3)

Bukti.

Ketika derajat kolom $Q(s)$ adalah d_i, Q(s) dapat ditulis sebagai :

$Q(s) = Q\ S(s)$ (4)

$S(s)$ menunjukkan bahwa $Q(s)$ berderajat kolom d_i. Matriks Q adalah matriks berukuran $(p\times(\sum_{i=1}^{m} d_i + m))$ yang merupakan koefisien dari elemen-elemen matriks $Q(s)$. Persamaan (.4) disubstitusikan ke persamaan (3), kemudian Q harus memenuhi

$Q\ S_l = B_l$ (5)

dengan $B_l = [b_1 , \dots, b_l]$. Karena S_l mempunyai rank penuh, solusi Q pada persamaan (5) tunggal. Matriks Q disubstitusikan pada persamaan (4) sehingga terdapat dengan tunggal matriks polinomial $Q(s)$

Contoh 2

Akan dibentuk suatu matriks polinomial $Q(s)$ berukuran (1×2), jika diberikan interpolasi triplets dengan titik interpolasi $l = 3$ yaitu:

$\{(s_j, a_j, b_j), j = 1, 2, 3\} = \{(-1, [1,0]^T, [2]), (0, [-1,1]^T, [0]), (1, [0,1]^T, [1])\}$.

Penyelesaian

Derajat kolom dari matriks polinomial $Q(s)$adalah d_i dengan i = 1,...,m. Matriks polinomial berukuran $(p\times m)$, sehingga m = 2. Oleh karena itu derajat kolom matriks polinomial adalah d_1 dan d_2. Menurut Teorema 1 :

$$l = \sum d_i + m,$$
$$3 = (d_1 + d_2) + 2,$$
$$d_1 + d_2 = 1.$$

Ada 2 kemungkinan pada kasus ini:

(i) Untuk $d_1 = 1$ maka $d_2 = 0$.

(ii) Untuk $d_1=0$, maka $d_2=1$

Misal diambil kemungkinan (i),maka

$$S(s) = \text{blk diag}\{[1,s]^T, [1]^T\}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substitusikan masing-masing nilai s_j pada pada $S(s)$, dan kalikan dengan $\boldsymbol{a_j}$, sehingga diperoleh

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriks polinomial yang terbentuk adalah :

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2}s & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Persamaan Diophantin Matriks Polinomial

Persamaan Diophantin mempunyai bentuk:

$$X(s)D(s) + Y(s)N(s) = Q(s) \qquad (6)$$

dengan $D(s)\in R[s]^{q\times m}$,$N(s)\in R[s]^{p\times m}$ dan $Q(s)\in R[s]^{k\times m}$ adalah matriks polinomial yang diberikan, dan $X(s)\in R[s]^{k\times q}$, $Y(s)\in R[s]^{k\times p}$ adalah matriks polinomial yang dicari.

Dalam teori sistem dan kontrol biasanya persamaan (6) muncul dengan $k = q = m$, sehingga $X(s), D(s)$ dan $Q(s)$ masing-masing berupa matriks polinomial persegi berukuran $(m\times m)$.

Definisi

Dua matriks polinomial *D(s)* dan *N(s)* disebut sebagai dua matriks yang saling koprima kanan jika pembagi kanan persekutuan terbesar dari *D(s)* dan *N(s)* adalah suatu matriks unimodular.

Teorema 2. [4]

Persamaan (6) mempunyai solusi $[X(s), Y(s)]$ jika dan hanya jika setiap pembagi kanan persekutuan terbesar (*greatest common right divisors = gcrd*) dari $D(s)$ dan $N(s)$ yaitu $G_R(s)$ adalah pembagi kanan (*right divisor*) dari $Q(s)$.

Bukti :

$(\Leftarrow)$ Misalkan matriks polinomial berukuran (*mxm*) $G_R(s)$ adalah gcrd dari $D(s)$ dan $N(s)$, maka terdapat matriks polinomial $U(s)$ yang unimodular, sehingga memenuhi persamaan:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) & U_2(s) \\ U_3(s) & U_4(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_R(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya $G_R(s)$ menjadi pembagi kanan dari $Q(s)$, sehingga dapat ditulis

$$Q(s) = Q_0(s)G_R(s)$$

maka diperoleh persamaan :

$$Q_0(s)U_1(s)D(s) + Q_0(s)U_2(s)N(s) = Q(s) \qquad (7)$$

Sehingga diperoleh solusi

$$X(s) = Q_0(s)U_1(s)$$
$$Y(s) = Q_0(s)U_2(s)$$

$(\Rightarrow)$ Misalkan $D(s)$ dan $N(s)$ dapat dituliskan dalam bentuk persamaan $D(s) = V_1(s)G_R(s),\quad N(s) = V_3(s)G_R(s)$ serta dengan mensubstitusikan persamaan (7) ke dalam persamaan (6), maka diperoleh: $[X(s)V_1(s) + Y(s)V_3(s)]G_R(s) = Q(s)$

Maka terlihat bahwa $G_R(s)$ adalah pembagi kanan dari $Q(s)$.

Akibat 1
Jika $D(s)$ dan $N(s)$ adalah koprima kanan (*right coprime*), maka persamaan (6) selalu mempunyai solusi.

Bukti:
Jika $D(s)$ dan $N(s)$ adalah koprima kanan, maka pembagi kanan persekutuan terbesar $G_R(s)$ adalah matriks unimodular. Dari persamaan (7) diperoleh persamaan berikut

$$G_R^{-1}(s)U_1(s)D(s)+G_R^{-1}(s)U_2(s)N(s)=\mathrm{I}.$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan $Q(s)$, maka solusinya adalah

$$X(s)=Q(s)G_R(s)^{-1}U_1(s) \text{ dan}$$

$$Y(s)=Q(s)G_R(s)^{-1}U_2(s).$$

Konsep untuk menyelesaikan persamaan matriks polinomial dijabarkan dalam uraian berikut:

Persamaan (6) dapat ditulis kembali dalam bentuk persamaan :

$$[X(s),Y(s)]\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}=Q(s). \qquad (8)$$

Dari persamaan (8), terlihat bahwa persamaan diophantin dapat diubah ke dalam persamaan matriks polinomial yang berbentuk

$$M(s)L(s)=Q(s), \qquad (9)$$

dengan

$$M(s)=[X(s),Y(s)] \text{ dan}$$

$$L(s)=\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}.$$

Matriks $M(s)$ diubah ke dalam:

$$M(s)=M_0+M_1 s+\cdots+M_r s^r \qquad (10)$$

dengan r adalah bilangan bulat tak negatif yang merupakan derajat tertinggi dari matriks polinomial $M(s)$.

Persamaan (10) ditulis kembali dalam persamaan :

$$M(s)=M[I \quad sI \quad \cdots \quad s^r I]^T$$

dengan $M=[M_0 \quad M_1 \quad \cdots \quad M_r]$ adalah matriks koefisien dari entri-entri matriks polinomial $M(s)$ yang berukuran $[k\times((p+m)(r+1))]$ dan I adalah matriks identitas berukuran $((p+m)\times(p+m))$.

Jika d_i = $\deg_{ci}[L(s)]$, i = 1, ..., m dan $\hat{Q}(s)=M(s)L(s)$, maka $deg_{ci}[\hat{Q}(s)] = d_i + r$, i = 1, ..., m. Berdasarkan konsep interpolasi matriks polinomial pada Teorema 1, dengan mengambil $l=\sum_{i=1}^{m}(d_i+r)+m=\sum_{i=1}^{m} d_i+m(r+1)$ titik–titik interpolasi $(s_j,a_j,b_j),\ j=1,\cdots,l$, maka matriks polinomial $\hat{Q}(s)$ yang berukuran $(k\times m)$ dapat ditulis sebagai:

$$\hat{Q}(s)=\hat{Q}S_r(s),$$

dengan $Sr(s)=$ blk diag $[1,s,\cdots,s^{d_i+r}]$ dan $\hat{Q}$ adalah matriks koefisien dari entri-entri matriks polinomial $\hat{Q}(s)$ yang berukuran $(k\times\sum_{i=1}^{m} d_i+m(r+1))$. Akhirnya dapat dibentuk matriks S_{rl} berukuran $\sum_{i=1}^{m} d_i + m(r+1)$ x l berikut:

$$S_{rl}=[S_r(s_1)a_1 S_r(s_2)a_2 \ldots S_r(s_l)a_l].$$

Matriks S_{rl} mempunyai rank penuh untuk s_j skalar yang berbeda dan $\boldsymbol{a_j}$ vektor tak nol berukuran (m x 1). Dengan demikian menurut Teorema 1 terdapat dengan tunggal matriks polinomial $\hat{Q}(s)$ yang memenuhi $\hat{Q}(s_j)a_j=b_j,\ j=1,2,\ldots,l$ (11)

Persamaan (9) dapat ditulis kembali ke dalam persamaan :

$$M[I \quad sI \quad \cdots \quad s^r I]^T \ L(s)=Q(s)$$

$$\Leftrightarrow M[L^T(s) \quad sL^T(s) \quad \cdots \quad s^r L^T(s)]^T=Q(s)$$

$$\Leftrightarrow ML_r(s)=Q(s) \qquad (12)$$

dengan

$$L_r(s)=[L^T(s) \quad sL^T(s) \quad \cdots \quad s^r L^T(s)] \text{ dan}$$

$$L_r(s)\in[R]^{(p+m)(r+1)\times m}$$

Dengan mengambil sebanyak l titik-titik interpolasi (s_j, $\boldsymbol{a_j}$), maka diperoleh persamaan:

$$M\,L_r(s_j)a_j=Q(s_j)a_j,\ j=1,\cdots,l$$

sehingga didapatkan:

$$ML_{rl}=B_l \qquad (13)$$

dengan

$L_{rl} = [L_r(s_1)a_1 \;\; L_r(s_2)a_2 \cdots L_r(s_l)a_l]$ dan
$B_l = [b_1 \;\; b_2 \cdots b_l]$
Dengan demikian, persamaan (12) dapat diselesaikan dengan mencari solusi dari persamaan (13).

Persamaan (13) merupakan sistem persamaan linier, sehingga solusi M ada jika dan hanya jika rank $\begin{bmatrix} L_{rl} \\ B_l \end{bmatrix}$= rank L_{rl}

Pandang persamaan Diophantin (2) dengan $D(s) \in R[s]^{m \times m}$ dan $N(s) \in R[s]^{p \times m}$ adalah koprima kanan dan misalkan d_i = $\deg_{ci} Q(s)$. Jika diambil $l = \sum d_i + m(r+1)$ titik-titik interpolasi (s_j, a_j), j=1, …, l, maka dapat dibentuk teorema berikut.

Teorema 3.[4]
Diketahui matriks polinomial $L(s)$ dan $Q(s)$ pada persamaan (9), misalkan $d_i = deg_{ci}[L(s)]$, i=1,…,m, dan pilih r sehingga memenuhi:

$$deg_{ci}\,[Q(s)] \le d_i + r, \;\; i=1, \ldots, m$$

Persamaan Diophantin (2) mempunyai solusi $M(s)$ dengan derajat r jika dan hanya jika solusi M dari persamaan (13) ada, dengan $M(s) = M[I, sI, \ldots, s^r I]^T$.

Bukti.
($\Rightarrow$) Karena $M(s) = M_0 + \ldots + M_r s^r$ dan M = [M_0, ..., M_r] maka diperoleh korespondensi satu–satu antara $M(s)$ dengan M.
($\Leftarrow$) Diketahui ruas kiri dari persamaan (13) dapat dituliskan $ML_{rl} = \hat{Q}S_{rl}$ (14)
dimana $\hat{Q}(s)=M(s)\;L(s)=\hat{Q}\,S_r(s)$, selanjutnya, dengan melihat persamaan (11), ruas kanan dari persamaan (12) dapat ditulis menjadi $B_l = QS_{rl}$ (15)
dimana $S_{rl} = [S_r(s_1)a_1 S_r(s_2)a_2 \ldots S_r(s_l)a_l]$ berukuran $(\sum_{i=1}^{m} d_i + m(r+1) \times l)$ dan mempunyai rank penuh sehingga menurut Teorema 1 $Q(s)$ adalah tunggal. Dari persamaan (14) dan persamaan (15) diperoleh $\hat{Q}S_{rl} = QS_{rl}$ atau $\hat{Q}=Q$ yang berarti Q juga tunggal. Karena $Q(s)$ tunggal maka $\hat{Q}(s)=Q(s)$ sehingga $M(s)L(s)= \hat{Q}(s)=Q(s)$.

Karena S_{rl} adalah matriks yang mempunyai rank penuh dan $M(s)L(s) = \hat{Q}(s)=Q(s)$ maka $M(s)= M_0+ \ldots +M_r s^r = M[I, sI, \ldots, s^r I]^T$ adalah solusi dari persamaan (9), dengan M adalah solusi dari persamaan (13).

Contoh 3
Diberikan matriks-matriks polinomial $D(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \end{bmatrix}$, $N(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $Q(s) = \begin{bmatrix} s^3+2s^2-3s-5 & -5s-5 \\ -2s^2-5s-4 & -s^2-3s-2 \end{bmatrix}$.
Dengan menggunakan Maple 8 didapatkan gcrd $G_R(s)$ dari matriks $D(s)$ dan $N(s)$ adalah $G_R(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\det(G_R(s)) = -1$, sehingga matriks $D(s)$ dan $N(s)$ adalah koprima kanan dan berdasarkan Akibat 1, persamaan Diophantin tersebut mempunyai solusi. Solusinya adalah:

$$M(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 5 & -3s & -10 \\ 2 & s+4 & -4s-2 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. PENUTUP
Keberadaan solusi persamaan diophantin ditentukan oleh pembagi kanan persekutuan terbesar dari matriks polinomial $D(s)$ dan N(s). Sedangkan solusi $X(s)$ dan $Y(s)$ diperoleh dengan menggunakan titik–titik interpolasi $(s_j, \boldsymbol{a_j})$. Pemba-hasan lebih lanjut mengenai persamaan diophantin dan aplikasinya dapat dijumpai pada teori sistem kontrol.

4. DAFTAR PUSTAKA
[1]. Antsaklis, P.J. and Gao, Z. (1993), *Polynomial and Rational Matrix Interpolation : Theory and Control Applications,* International Journal of Control, 58(2), 349 – 404.

[2]. Kailath, T. (1980), *Linier System*, Englewood Cliffs, New York.
[3]. Supranto, J. (1998), *Pengantar Matriks*, Rineka Cipta, Jakarta.
[4]. Vardulakis. A.I.G, (1991), *Linear Multivariable Control*, John Wiley & Sons, Chicester, England.